

Wat is algebraïsche getaltheorie?

Niels Ketelaars

3 juli 2023

Kortom: vergelijkingen oplossen in de gehele getallen.

Kortom: vergelijkingen oplossen in de gehele getallen.

$$\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$

Kortom: vergelijkingen oplossen in de gehele getallen.

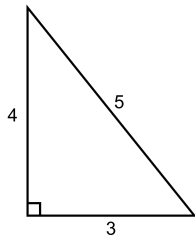
$$\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$

Voorbeeld: vind alle mogelijke rechthoekige driehoeken waarvan alle zijden gehele getallen zijn.

Kortom: vergelijkingen oplossen in de gehele getallen.

$$\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$

Voorbeeld: vind alle mogelijke rechthoekige driehoeken waarvan alle zijden gehele getallen zijn.



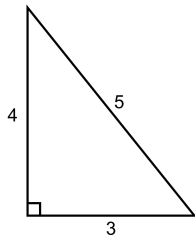
Kortom: vergelijkingen oplossen in de gehele getallen.

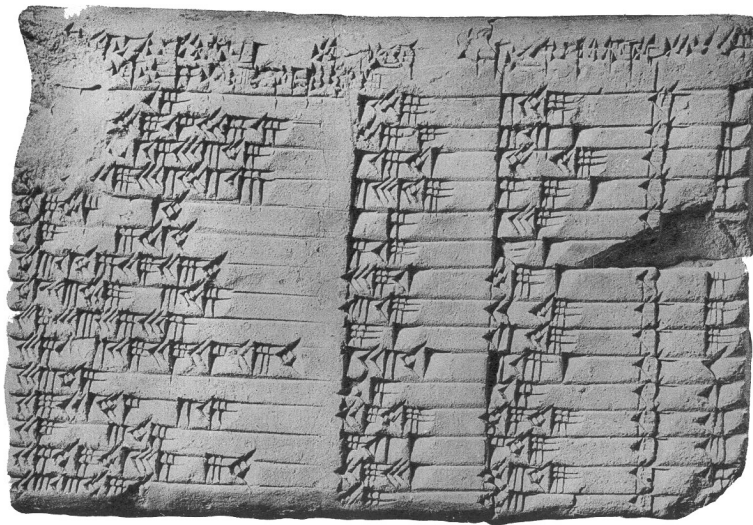
$$\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$

Voorbeeld: vind alle mogelijke rechthoekige driehoeken waarvan alle zijden gehele getallen zijn.

We zoeken gehele getallen a, b, c met

$$a^2 + b^2 = c^2.$$





Vind alle gehele getallen a, b met

$$a^2 - 2 \cdot b^2 = 1.$$

Vind alle gehele getallen a, b met

$$a^2 - 2 \cdot b^2 = 1.$$

Oplossing: Merk eerst op dat $a = 3, b = 2$ een oplossing is:

$$3^2 - 2 \cdot 2^2 = 9 - 2 \cdot 4 = 9 - 8 = 1.$$

Vind alle gehele getallen a, b met

$$a^2 - 2 \cdot b^2 = 1.$$

Oplossing: Merk eerst op dat $a = 3, b = 2$ een oplossing is:

$$3^2 - 2 \cdot 2^2 = 9 - 2 \cdot 4 = 9 - 8 = 1.$$

Schrijf nu

$$3^2 - 2 \cdot 2^2 = (3 + 2 \cdot \sqrt{2})(3 - 2 \cdot \sqrt{2}).$$

Vind alle gehele getallen a, b met

$$a^2 - 2 \cdot b^2 = 1.$$

Oplossing: Merk eerst op dat $a = 3, b = 2$ een oplossing is:

$$3^2 - 2 \cdot 2^2 = 9 - 2 \cdot 4 = 9 - 8 = 1.$$

Schrijf nu

$$3^2 - 2 \cdot 2^2 = (3 + 2 \cdot \sqrt{2})(3 - 2 \cdot \sqrt{2}).$$

Dus geldt ook

$$(3 + 2 \cdot \sqrt{2})^2 (3 - 2 \cdot \sqrt{2})^2 = 1^2 = 1.$$

Nu vinden we

$$(3 + 2 \cdot \sqrt{2})^2 = 17 + 12 \cdot \sqrt{2},$$

$$(3 - 2 \cdot \sqrt{2})^2 = 17 - 12 \cdot \sqrt{2}.$$

Nu vinden we

$$(3 + 2 \cdot \sqrt{2})^2 = 17 + 12 \cdot \sqrt{2},$$

$$(3 - 2 \cdot \sqrt{2})^2 = 17 - 12 \cdot \sqrt{2}.$$

We zien dus dat

$$(17 + 12 \cdot \sqrt{2})(17 - 12 \cdot \sqrt{2}) = 1.$$

Nu vinden we

$$(3 + 2 \cdot \sqrt{2})^2 = 17 + 12 \cdot \sqrt{2},$$

$$(3 - 2 \cdot \sqrt{2})^2 = 17 - 12 \cdot \sqrt{2}.$$

We zien dus dat

$$(17 + 12 \cdot \sqrt{2})(17 - 12 \cdot \sqrt{2}) = 1.$$

Maar net als eerder,

$$(17 + 12 \cdot \sqrt{2})(17 - 12 \cdot \sqrt{2}) = 17^2 - 2 \cdot 12^2.$$

Nu vinden we

$$(3 + 2 \cdot \sqrt{2})^2 = 17 + 12 \cdot \sqrt{2},$$

$$(3 - 2 \cdot \sqrt{2})^2 = 17 - 12 \cdot \sqrt{2}.$$

We zien dus dat

$$(17 + 12 \cdot \sqrt{2})(17 - 12 \cdot \sqrt{2}) = 1.$$

Maar net als eerder,

$$(17 + 12 \cdot \sqrt{2})(17 - 12 \cdot \sqrt{2}) = 17^2 - 2 \cdot 12^2.$$

Dus

$$17^2 - 2 \cdot 12^2 = 1$$

Zo vinden we nog veel meer oplossingen:

$$(3 + 2 \cdot \sqrt{2})^2 = 17 + 12 \cdot \sqrt{2}$$

$$(3 + 2 \cdot \sqrt{2})^3 = 99 + 138 \cdot \sqrt{2}$$

$$(3 + 2 \cdot \sqrt{2})^4 = 577 + 408 \cdot \sqrt{2}$$

$$(3 + 2 \cdot \sqrt{2})^5 = 3363 + 2378 \cdot \sqrt{2}$$

$\vdots$

Zo vinden we nog veel meer oplossingen:

$$(3 + 2 \cdot \sqrt{2})^2 = 17 + 12 \cdot \sqrt{2}$$

$$17^2 - 2 \cdot 12^2 = 1$$

$$(3 + 2 \cdot \sqrt{2})^3 = 99 + 70 \cdot \sqrt{2}$$

$$99^2 - 2 \cdot 70^2 = 1$$

$$(3 + 2 \cdot \sqrt{2})^4 = 577 + 408 \cdot \sqrt{2}$$

$$577^2 - 2 \cdot 408^2 = 1$$

$$(3 + 2 \cdot \sqrt{2})^5 = 3363 + 2378 \cdot \sqrt{2}$$

$$3363^2 - 2 \cdot 2378^2 = 1$$

$\vdots$

$\vdots$